REFLEXIONES EN TORNO A LAS ECUACIONES Y SU ENSEÑANZA

Andrea Novembre	María Paula Trillini	Débora Sanguinetti	Mauro Nicodemo
anovembre@gmail.com	ptrillini@gmail.com	profedeborasanguinetti@gmail.com	mfnicodemo@gmail.com
INFD	UNGS	INFD	INFD
Argentina	Argentina	Argentina	Argentina

Tema: Pensamiento algebraico
Modalidad: Taller
Nivel educativo: Medio (11 a 17 años)
Palabras clave: ecuaciones, secuencia didáctica.

Resumen

Con respecto a la enseñanza de ecuaciones, es habitual que en la escuela media se realice un abordaje centrado solamente en su resolución, reducido únicamente a la aplicación de técnicas propuestas por el profesor. Sin embargo, este abordaje resulta insuficiente para aprehender el objeto en cuestión, pues las ecuaciones son objetos matemáticos mucho más complejos, conformados por múltiples facetas.

El propósito de este taller es reflexionar en torno a la enseñanza de ecuaciones y explorar distintas formas de abordarla. Se presentarán algunas propuestas, cuya intención principal es dotar de sentido a las técnicas de resolución, sobre la base de un trabajo activo de reflexión por parte de los estudiantes. A su vez, se propondrá una secuenciación diferente a la utilizada habitualmente, en mayor medida ligada a las estrategias de cálculo y en menor, a una clasificación académica.

El trabajo durante el taller se centrará en el análisis de secuencias didácticas, mediante la reflexión de su pertinencia, su potencial y su posible gestión en el aula.

Introducción

Con respecto a la enseñanza de ecuaciones, es habitual que en el escuela media se realice un abordaje centrado solamente en su resolución, reducido únicamente a la aplicación de técnicas propuestas por el profesor. Como describe Sessa (2005), “para muchos alumnos, las ecuaciones son ‘cosas que se despejan’, y dominar las reglas de esta técnica suele ser una fuente inagotable de dificultades para ellos”.

Podemos distinguir entonces dos problemáticas asociadas a la enseñanza de ecuaciones. Por un lado, la problemática asociada al dominio de técnicas de resolución y de transformaciones algebraicas, que la mayoría de las veces son propuestas por el profesor sin brindarle a los alumnos la posibilidad de construirlas con sentido. Por otro lado, la problemática asociada al conocimiento más acabado del objeto ecuación, ya que un abordaje centrado solamente en las técnicas de resolución abarca parcialmente al objeto.

Sobre la base de estas consideraciones, los autores elaboramos e implementamos una propuesta para la enseñanza de ecuaciones en un aula de escuela media con alumnos de 13-14 años. En ella se propone una secuenciación diferente a la utilizada habitualmente, en mayor medida ligada a las estrategias de cálculo y en menor, a una clasificación académica.

El propósito de este taller es crear un espacio de reflexión acerca de las distintas maneras en que se pueden clasificar, agrupar y secuenciar las ecuaciones, y cómo cada una de ellas posibilita la enseñanza de distintas facetas del objeto.

Algunas clasificaciones posibles

A continuación les presentamos distintas maneras de clasificar las ecuaciones con las que se trabaja en la escuela media. Algunas de ellas sirven para organizar la secuenciación de su enseñanza a lo largo de la escolaridad. Otras tal vez sólo se utilicen como subcategorías de otras clasificaciones.

Según la función asociada a las expresiones

Esta clasificación es posiblemente la más habitual. Por ejemplo, se aborda la enseñanza de ecuaciones lineales y de sistemas de ecuaciones lineales a la par de la enseñanza de funciones lineales. Del mismo modo se aborda la enseñanza de ecuaciones cuadráticas, exponenciales, etc.

Según la cantidad de soluciones

Generalmente esta clasificación se usa como una subcategoría de otra clasificación. Por ejemplo, para organizar los sistemas de ecuaciones entre: los que tienen solución única, los que tienen infinitas soluciones y los que no tienen solución.

Según la interpretación del signo "="

Si bien esta interpretación depende de los conocimientos y de las acciones del alumno que resuelve, algunas expresiones favorecen una u otra interpretación. Por ejemplo, una ecuación del tipo $x^2 = 9$ favorece a la interpretación del número 9 como resultado de un cálculo, conformándose como tarea hallar el valor de x que multiplicado por sí mismo da 9. En cambio, una ecuación del tipo $x + 2 = 3x - 5$ favorece la interpretación del signo "=" como comparación entre dos cálculos, siendo la tarea encontrar los valores de x que verifican la igualdad.

Según la técnica de resolución

Como es sabido, existe una cantidad muy grande y muy variada de técnicas de resolución. Describimos aquí algunas que nos sirvieron para armar la propuesta de enseñanza presentada, advirtiendo que la clasificación no es disjunta.

- Las que se pueden resolver aritméticamente.
  - A partir de una suma.
  - A partir de una resta.
  - A partir de un producto.
  - A partir de un cociente, con la variable como dividendo o como divisor.

  Este grupo de ecuaciones posibilita la construcción de técnicas de despeje a partir de la generalización de estructuras de cálculo sobre la base de relaciones aritméticas. Por ejemplo, para todas las ecuaciones con la estructura $\frac{a}{x} = b$ se puede despejar x transformado primero la ecuación en $a = b \cdot x$ y luego en $\frac{a}{b} = x$ sobre la base de las relaciones aritméticas entre la división y la multiplicación.
- Las que se pueden resolver a partir del análisis de la estructura del cálculo.
  - El producto de dos factores igualado a cero.
  - El producto de dos factores igualado a un número distinto de cero, con dominio en el conjunto de los números enteros. Por ejemplo:
    $(x - 1)(x + 3) = -3$. Para resolver esta ecuación se podrían considerar todas las multiplicaciones de números enteros que dan como resultado -2 y deducir si existe un valor de x para el cual se da esa multiplicación: $1 \cdot (-3); -1 \cdot 3; 3 \cdot (-1); -3 \cdot 1$.

Una propuesta para el aula

La secuencia didáctica presentada fue producida sobre la base de los siguientes objetivos. Que los estudiantes sean capaces de:

- construir la noción de ecuación como proposición que puede ser verdadera o falsa según los valores de la variable, y su conjunto solución como el conjunto de valores de las variables que hacen que la proposición sea verdadera;
- poner en juego esta caracterización de las ecuaciones para decidir si un número es o no solución de una ecuación independientemente de su estructura;
- explorar, conjeturar y validar posibles soluciones de una ecuación utilizando conocimientos aritméticos;
- explorar, conjeturar y validar posibles técnicas de resolución;
- construir las técnicas con sentido a partir de la generalización de conocimientos y relaciones aritméticas;
- apropiarse de las técnicas elaboradas, pudiendo identificar en qué problemas es pertinente su utilización.

Esta propuesta está conformada por diversos tipos de tareas, algunos de los cuales no involucran la resolución de ecuaciones. Por ejemplo:

- decidir si un valor de la variable es solución o no de una ecuación;
- analizar procedimientos de resolución elaborados por otros;
- inventar ecuaciones dado su conjunto solución;
- identificar ecuaciones que tengan como solución a un conjunto de valores dado;
- elaborar explicaciones sobre afirmaciones que apuntan al análisis de la generalidad;
- decidir acerca de la validez de una afirmación, fundamentando matemáticamente la respuesta dada.

Todas estas tareas, sumadas a las vinculadas a la resolución de ecuaciones, conforman el conjunto de prácticas asociadas al objeto ecuación, rompiendo la idea de que las ecuaciones son “cosas que se despejan”. Permite dotar de mayor sentido a las ecuaciones y, desde esa perspectiva, conocerlas de manera más acabada.

Conclusiones

Un conocimiento más acabado y profundo de las ecuaciones incluye tanto cuestiones vinculadas a técnicas de resolución -como pueden ser las transformaciones algebraicas y las distintas interpretaciones del signo "="- como cuestiones más generales asociadas a su naturaleza, es decir, a qué es una ecuación. En esta dirección, creemos que un trabajo con ecuaciones en el aula debe contemplar tanto problemas orientados a la construcción de técnicas de resolución como problemas que tengan como objetivo reflexionar acerca de qué es una ecuación. Para ello se torna necesario realizar actividades en donde: se ponga en cuestión la noción de conjunto solución; se estudie la cantidad y la existencia o no de soluciones, se analicen procedimientos, etc.

En este escrito presentamos distintos criterios para agrupar y secuenciar ecuaciones. Cada uno de ellos favorece un tipo de trabajo y una concepción del objeto ecuación, cuestión que se analiza en el taller. Creemos que una secuenciación organizada según las técnicas de resolución le permite al docente gestionar la clase con el objetivo de que los alumnos construyan las técnicas y validen las transformaciones algebraicas sobre la base de sus conocimientos aritméticos.

Referencias bibliográficas

Napp, C., Novembre A., Sadovsky P., Sessa C. (2000). Documento No. 2. Apoyo a los alumnos de primer año en los inicios del nivel medio. La formación de los alumnos como estudiantes. Estudiar matemática. Buenos Aires: DGCyE. Subsecretaría de Educación. Recuperado de: http://www.buenosaires.gob.ar/areas/educacion/curricula/d2web01.pdf.

Segal, S. y Giuliani, D. (2008). "Trabajando con ecuaciones" en Modelización matemática en el aula: posibilidades y necesidades. Buenos Aires: Libros del Zorzal. pp. 79-96.

Sessa, C. (2005). Iniciación al estudio didáctico del álgebra: orígenes y perspectivas (Vol. 2). Libros del Zorzal.

ANEXO

Acerca del taller

A continuación mostramos las consignas para el taller.

Actividad 1: Momento de trabajo en grupos

Con qué criterios y/o tipos de tareas organizaría estas ecuaciones para que formen parte de una propuesta didáctica en el secundaria básica.

$3x = 15$	$6 \cdot (\frac{x}{3} + \frac{x}{4}) = -7$	$x + 9 = 18 - 2x$
$x - 8 = 4$	$x^3 - 2x^2 - 2910 = 0$	$15 + x = 30$
$(1 - x) \cdot (x + 3) = 0$	$x \cdot 6 = -144$	$x^2 - 5x - 60 = 0$
$x \cdot (x - 5) \cdot (x + 2) = 0$	$\frac{135}{x} = 3$	$2x^2 = 32$
$(x - 2) \cdot (x + 3) = 7$	$927 : x = 9$	$x^2 = -25$
$3x^3 = 375$	$x \cdot 24 = 9$	$(x - 2) \cdot (x + 3) + 3 = 3$
$x^2 = 25$	$x^3 = -27$	$x \cdot (\frac{2}{3} - x) \cdot (7 - x) \cdot (x - \sqrt{3}) = 0$
$\frac{x}{9} = -81$	$x^2 = 0$	$x \cdot (x + 3) = 3$
$(x - 2) \cdot (x + 3) = 6$	$x^3 = 8$	$(x - 8) \cdot (x + 12) = 0$

Actividad 2: Espacio colectivo

Con estas preguntas como guía, el intercambio colectivo puede girar en torno a:

- ¿Qué criterios y tipos de tareas tuvieron en cuenta para organizar las ecuaciones?
- ¿En qué medida creen que esa organización favorece a la comprensión?
- ¿En qué medida creen que esa organización favorece la construcción de las técnicas?

Actividad 3: Momento de trabajo en grupos

A continuación los invitamos a leer y analizar la siguiente propuesta didáctica, identificando posibles criterios y tareas que pudieron formar parte de su elaboración.

Actividad 4: Cierre del taller